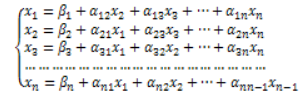
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №5 (Вариант 24)

**Тема:** метод простых итераций для решения СЛАУ

**Задание:** решить СЛАУ методом простых итераций

**Теория:**

Представим систему линейных алгебраических уравнений в виде: (1)

или сокращенно:

 (2)



Выбираем начальную точку и строим итерационный процесс для системы (1).

Получаем итерационную последовательность точек n -мерного пространства:



 Чтобы последовательность была збіжною, достаточно выполнения одного из следующих условий:

а) , то есть, максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (1), взятых по строкам, должна быть меньше единицы;



б) , то есть максимальная из сумм коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2), взятых по столбцам, должна быть меньше единицы;

в) , то есть сумма квадратов коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2) должна быть меньше единицы.

При этих условиях процесс итерации для данной системы сходится к единственному решению независимо от выбора начального вектора.

Алгоритм численного решения СЛАУ методом простой итерации:

1. Приведем систему к виду, удобного для итерационного процесса.
2. Посчитаем В і елементи:

,, (3)

1. Вычислим норму матрицы В:

(4)

Если >1, то итерационный процесс расходится.

Если <1, то вычисление продолжается.

1. Вычислим:

(5)

1. Посчитаем необходимое количество итераций для достижения требуемой точности ε.
2. Выбираем .
3. Вычислим:

xk+1 = B + , (6)

Когда k = m, итерационный процесс останавливаем.

**Решение:**

**Исходная система уравнений:**

**Исходная матрица:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -0.97 | 0.08 | 0.31 | -0.28 | 2.24 |
| 0.15 | 1.43 | 0.26 | -0.15 | 1.15 |
| 0.21 | 0.24 | 1.01 | 0 | -0.72 |
| 0.05 | 0.13 | 0.56 | 1.67 | 3.17 |

Систему будем решать методом последовательных приближений.

Пусть x0 = β, тогда:

x1 = b - a x0

x2 = b - a x1  
....  
xk+1 = b - a xk

Приведем к виду:

x1 = -2.309 - 0.0825x2 - 0.32x3 + 0.29x4  
x2 = 0.804 + 0.1x1 + 0.18x3 - 0.1x4  
x3 = - 0.713 + 0.21x1 + 0.24x2  
x4 = 1.898 + 0.0299x1 + 0.0778x2 + 0.34x3

Вычисления заканчиваются по критерию:

https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=max|x_%7bi%7d%5e%7bk%7d-x_%7bi%7d%5e%7bk%2B1%7d|%20%3C%20\frac%7b1-a%7d%7ba%7d\cdot%20\epsilon

где a=max ∑|rij|

a = 0.0825 + 0.32 + 0.289 = 0.6907

https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=max|x_%7bi%7d%5e%7bk%7d-x_%7bi%7d%5e%7bk%2B1%7d|%20%3C%20\frac%7b1-0.6907%7d%7b0.6907%7d\cdot%200.001%20=%200.00044780

Покажем вычисления на примере нескольких итераций:

Норма матрицы = 0.690722

Норма вектора d = 2.30928

**N = 1**

x1 = 0.0824742 \* 0.804196 + 0.319588 \* -0.712871 + -0.28866 \* 1.8982 + -2.30928 = -3.01871

x2 = -0.104895 \* -2.30928 + -0.181818 \* -0.712871 + 0.104895 \* 1.8982 + 0.804196 = 1.37515

x3 = -0.207921 \* -2.30928 + -0.237624 \* 0.804196 + -0 \* 1.8982 + -0.712871 = -0.42382

x4 = -0.0299401 \* -2.30928 + -0.0778443 \* 0.804196 + -0.335329 \* -0.712871 + 1.8982 = 2.14379

**N = 2**

x1 = 0.0824742 \* 1.37515 + 0.319588 \* -0.42382 + -0.28866 \* 2.14379 + -2.30928 = -2.95014

x2 = -0.104895 \* -3.01871 + -0.181818 \* -0.42382 + 0.104895 \* 2.14379 + 0.804196 = 1.42278

x3 = -0.207921 \* -3.01871 + -0.237624 \* 1.37515 + -0 \* 2.14379 + -0.712871 = -0.411987

x4 = -0.0299401 \* -3.01871 + -0.0778443 \* 1.37515 + -0.335329 \* -0.42382 + 1.8982 = 2.02366

**N = 3**

x1 = 0.0824742 \* 1.42278 + 0.319588 \* -0.411987 + -0.28866 \* 2.02366 + -2.30928 = -2.90775

x2 = -0.104895 \* -2.95014 + -0.181818 \* -0.411987 + 0.104895 \* 2.02366 + 0.804196 = 1.40083

x3 = -0.207921 \* -2.95014 + -0.237624 \* 1.42278 + -0 \* 2.02366 + -0.712871 = -0.437562

x4 = -0.0299401 \* -2.95014 + -0.0778443 \* 1.42278 + -0.335329 \* -0.411987 + 1.8982 = 2.01393

**N = 4**

x1 = 0.0824742 \* 1.40083 + 0.319588 \* -0.437562 + -0.28866 \* 2.01393 + -2.30928 = -2.91493

x2 = -0.104895 \* -2.90775 + -0.181818 \* -0.437562 + 0.104895 \* 2.01393 + 0.804196 = 1.40001

x3 = -0.207921 \* -2.90775 + -0.237624 \* 1.40083 + -0 \* 2.01393 + -0.712871 = -0.44116

x4 = -0.0299401 \* -2.90775 + -0.0778443 \* 1.40083 + -0.335329 \* -0.437562 + 1.8982 = 2.02294

**N = 5**

x1 = 0.0824742 \* 1.40001 + 0.319588 \* -0.44116 + -0.28866 \* 2.02294 + -2.30928 = -2.91874

x2 = -0.104895 \* -2.91493 + -0.181818 \* -0.44116 + 0.104895 \* 2.02294 + 0.804196 = 1.40236

x3 = -0.207921 \* -2.91493 + -0.237624 \* 1.40001 + -0 \* 2.02294 + -0.712871 = -0.439474

x4 = -0.0299401 \* -2.91493 + -0.0778443 \* 1.40001 + -0.335329 \* -0.44116 + 1.8982 = 2.02443

**N = 6**

x1 = 0.0824742 \* 1.40236 + 0.319588 \* -0.439474 + -0.28866 \* 2.02443 + -2.30928 = -2.91844

x2 = -0.104895 \* -2.91874 + -0.181818 \* -0.439474 + 0.104895 \* 2.02443 + 0.804196 = 1.40261

x3 = -0.207921 \* -2.91874 + -0.237624 \* 1.40236 + -0 \* 2.02443 + -0.712871 = -0.439239

x4 = -0.0299401 \* -2.91874 + -0.0778443 \* 1.40236 + -0.335329 \* -0.439474 + 1.8982 = 2.02379

|x(k+1)i - x(k)i|< 0.001

x1 = -2.91844

x2 = 1.40261

x3 = -0.439239

x4 = 2.02379

**Протокол решения в Scilab:**

disp("Решение СЛАУ методом простой итерации")

A=[-0.97 0.08 0.31 -0.28;

0.15 1.43 0.26 -0.15;

0.21 0.24 1.01 0;

0.05 0.13 0.56 1.67];

disp("Введена матрица с коэффициентами в левой части:")

disp(A)

B = [2.24; 1.15; -0.72; 3.17];

disp("Введена матрица с коэффициентами в правой части:")

disp(B)

AB = [A B]

eps = 0.001

disp('Заданная точность равна e = '+string(eps))

for i=1:size(A, 'r')

a(i,1:4) = -AB(i,1:4)/AB(i,i)

a(i,i)=0

b(i,1)=AB(i,5)/AB(i,i)

end

t=[]

X0=[0; 0; 0; 0]

k=1

X1=a\*b+b

disp('Итерация №'+string(k)+':')

disp('Значения:')

disp(string(X1(1))+' '+string(X1(2))+' '+string(X1(3))+' '+string(X1(4)))

while norm(X1-X0)>eps

k=k+1

disp('Итерация №'+string(k)+':')

X0=X1

X1=a\*X0+b

disp('Значения:')

disp(string(X1(1))+' '+string(X1(2))+' '+string(X1(3))+' '+string(X1(4)))

disp('Разница:')

disp(string(abs(X1(1)-X0(1)))+' '+string(abs(X1(2)-X0(2)))+' '+string(abs(X1(3)-X0(3)))+' '+string(abs(X1(4)-X0(4)))+' ')

end

disp("Корни уравнения:")

disp(X1)

**Вывод в консоли:**

-->

disp("Решение СЛАУ методом простой итерации")

Решение СЛАУ методом простой итерации

A=[-0.97 0.08 0.31 -0.28;

0.15 1.43 0.26 -0.15;

0.21 0.24 1.01 0;

0.05 0.13 0.56 1.67];

disp("Введена матрица с коэффициентами в левой части:")

Введена матрица с коэффициентами в левой части:

disp(A)

-0.97 0.08 0.31 -0.28

0.15 1.43 0.26 -0.15

0.21 0.24 1.01 0.

0.05 0.13 0.56 1.67

B = [2.24; 1.15; -0.72; 3.17];

disp("Введена матрица с коэффициентами в правой части:")

Введена матрица с коэффициентами в правой части:

disp(B)

2.24

1.15

-0.72

3.17

AB = [A B]

AB =

-0.97 0.08 0.31 -0.28 2.24

0.15 1.43 0.26 -0.15 1.15

0.21 0.24 1.01 0. -0.72

0.05 0.13 0.56 1.67 3.17

eps = 0.001

eps =

0.001

disp('Заданная точность равна e = '+string(eps))

Заданная точность равна e = 0.001

for i=1:size(A, 'r')

a(i,1:4) = -AB(i,1:4)/AB(i,i)

a(i,i)=0

b(i,1)=AB(i,5)/AB(i,i)

end

a =

-1. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

b =

-2.3092784

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

-0.1048951 -1. -0.1818182 0.1048951

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

-0.1048951 0. -0.1818182 0.1048951

b =

-2.3092784

0.8041958

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

-0.1048951 0. -0.1818182 0.1048951

-0.2079208 -0.2376238 -1. 0.

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

-0.1048951 0. -0.1818182 0.1048951

-0.2079208 -0.2376238 0. 0.

b =

-2.3092784

0.8041958

-0.7128713

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

-0.1048951 0. -0.1818182 0.1048951

-0.2079208 -0.2376238 0. 0.

-0.0299401 -0.0778443 -0.3353293 -1.

a =

0. 0.0824742 0.3195876 -0.2886598

-0.1048951 0. -0.1818182 0.1048951

-0.2079208 -0.2376238 0. 0.

-0.0299401 -0.0778443 -0.3353293 0.

b =

-2.3092784

0.8041958

-0.7128713

1.8982036

t=[]

t =

[]

X0=[0; 0; 0; 0]

X0 =

0.

0.

0.

0.

k=1

k =

1.

X1=a\*b+b

X1 =

-3.0187128

1.375153

-0.4238203

2.1437883

disp('Итерация №'+string(k)+':')

Итерация №1:

disp('Значения:')

Значения:

disp(string(X1(1))+' '+string(X1(2))+' '+string(X1(3))+' '+string(X1(4)))

-3.0187128 1.3751530 -0.4238203 2.1437883

while norm(X1-X0)>eps

k=k+1

disp('Итерация №'+string(k)+':')

X0=X1

X1=a\*X0+b

disp('Значения:')

disp(string(X1(1))+' '+string(X1(2))+' '+string(X1(3))+' '+string(X1(4)))

disp('Разница:')

disp(string(abs(X1(1)-X0(1)))+' '+string(abs(X1(2)-X0(2)))+' '+string(abs(X1(3)-X0(3)))+' '+string(abs(X1(4)-X0(4)))+' ')

> end

k =

2.

Итерация №2:

X0 =

-3.0187128

1.375153

-0.4238203

2.1437883

X1 =

-2.9501369

1.4227751

-0.4119872

2.0236558

Значения:

-2.9501369 1.4227751 -0.4119872 2.0236558

Разница:

0.0685759 0.0476221 0.0118332 0.1201325

k =

3.

Итерация №3:

X0 =

-2.9501369

1.4227751

-0.4119872

2.0236558

X1 =

-2.9077501

1.4008291

-0.4375617

2.0139275

Значения:

-2.9077501 1.4008291 -0.4375617 2.0139275

Разница:

0.0423868 0.0219461 0.0255745 0.0097283

k =

4.

Итерация №4:

X0 =

-2.9077501

1.4008291

-0.4375617

2.0139275

X1 =

-2.9149252

1.4000124

-0.4411598

2.0229427

Значения:

-2.9149252 1.4000124 -0.4411598 2.0229427

Разница:

0.0071751 0.0008167 0.0035982 0.0090152

k =

5.

Итерация №5:

X0 =

-2.9149252

1.4000124

-0.4411598

2.0229427

X1 =

-2.9187449

1.4023649

-0.4394739

2.0244276

Значения:

-2.9187449 1.4023649 -0.4394739 2.0244276

Разница:

0.0038196 0.0023525 0.0016859 0.0014850

k =

6.

Итерация №6:

X0 =

-2.9187449

1.4023649

-0.4394739

2.0244276

X1 =

-2.9184407

1.4026148

-0.4392388

2.0237935

Значения:

-2.9184407 1.4026148 -0.4392388 2.0237935

Разница:

0.0003042 0.0002499 0.0002352 0.0006341

disp("Корни уравнения:")

Корни уравнения:

disp(X1)

-2.9184407

1.4026148

-0.4392388

2.0237935

**Вывод:**

Можно заметить, что при нахождении ответов решения системы есть небольшие разбежности, потому что считая вручную используем ε = 0,001 (допускаемое приближение).

**Список используемой литературы:**

1. Методи обчислень: навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету / Б.М. Ляшенко, О.М. Кривонос, Т.А. Вакалюк.- Житомир Вид-во ЖДУ ім. І. Франка 2014. – 224с. (Укр.мов.) ст. 39 -42